
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. GAROFALO

SU UN RISULTATO DI SIMMETRIA RELATIVO AD UN
PROBLEMA AI LIMITI SOVRADETERMINATO

5 FEBBRAIO 1987

1. INTRODUZIONE

In [Se] Serrin ha dimostrato il seguente

Teorema. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e limitato con frontiera di classe C^2 . Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una soluzione dell'equazione differenziale ellittica

$$(1.1) \quad a(u, |\nabla u|) \Delta u + b(u, |\nabla u|) u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} = f(u, |\nabla u|),$$

dove le funzioni a , b e f sono C^1 nelle loro variabili. Se u soddisfa le condizioni ai limiti

$$(1.2) \quad u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \text{costante} \quad \text{su } \partial\Omega,$$

allora Ω dev'essere una palla e u dev'essere simmetrica rispetto al centro della palla.

In (1.1) s'è adottata la convenzione seguente; indici ripetuti sottointendono somma rispetto agli stessi. Tale convenzione sarà rispettata nel seguito di questa nota. La condizione di ellitticità in (1.1) si esprime tramite non degenerazione della forma $a_{i,j}(u, \sigma) = b(u, |\sigma|) \sigma_i \sigma_j + a(u, |\sigma|) \delta_{ij}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La dimostrazione di Serrin si basa su argomenti di simmetria (in particolare, il metodo degli iperpiani mobili di A.D. Alexandrov) uniti a una versione sofisticata del classico principio di massimo di Hopf alla frontiera. A causa del metodo usato Serrin è costretto a richiedere che tanto il dominio Ω che la soluzione u siano dotati di regolarità almeno C^2 . In appendice al lavoro di Serrin è apparsa una breve nota di Weinberger in cui viene presentata una dimostrazione diversa di un caso speciale del Teorema precedente. Specificamente, Weinberger considera il caso in cui $\Delta u = -1$ nella (1.1.). La tecnica di Weinberger si basa su un'identità integrale di tipo Rellich e un principio di massimo interno, si veda [W].

In questa nota esponiamo un risultato di simmetria che estende il metodo di Weinberger a una classe di equazioni ellittiche non lineari e che possono divenire degeneri. Inoltre, nel dominio Ω non si fa alcuna ipotesi di regolarità. Quanto verrà esposto fa parte di un lavoro in collaborazione con John Lewis di recente ultimato, v. [GL]. Introduciamo qualche notazione. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^+)$ una funzione positiva, crescente e convessa. Per $p \in (1, +\infty)$ fissato supponiamo che esistano $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$(1.2) \quad c_1(t^p - 1) \leq tf'(t) \leq c_2(t^{p+1}) \quad , \quad t > 0,$$

$$(1.3) \quad c_1 \leq \frac{tf''(t)}{f'(t)} \leq c_2 \quad , \quad t > 0.$$

Osserviamo esplicitamente che (1.3) implica che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = f'(0) = 0.$$

Diremo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ è una soluzione debole di

$$(1.4) \quad \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \nabla u) = -1 \quad \text{in } \Omega$$

se per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha

$$(1.5) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} \phi \, dx.$$

Nella (1.5) l'integrando a primo membro è da intendersi nullo in ogni punto in cui $\nabla u = 0$.

Il risultato principale in [GL] è dato dal seguente

Teorema 1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e connesso e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una soluzione debole non negativa di (1.4). Supponiamo che esista $a > 0$ tale che $|\nabla u(x)| \rightarrow a$, $u(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \partial\Omega$ nel senso seguente:*

dato $\epsilon > 0$ esiste un aperto $O = O(\epsilon) \supset \partial\Omega$ tale che

$$(1.6) \quad \left| |\nabla u(x) - a| \right| < \epsilon, \quad u(x) < \epsilon,$$

per quasi ogni $x \in O \cap \Omega$. Allora Ω è una palla e u è simmetrica rispetto al centro della palla.

Osserviamo che nessuna ipotesi di regolarità è stata fatta su $\partial\Omega$. Inoltre, si assume che la u sia soluzione solo in senso debole e che le condizioni ai limiti siano verificate solo nel senso espresso dalla (1.6). È il caso di notare che se $f(t) = \frac{t^p}{p}$ in (1.2), (1.3), allora il primo membro di (1.4) è il così detto p -Laplaciano di u , cioè $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} u)$. In tal caso la funzione

$$(1.7) \quad u(x) = \left[R^{\frac{p}{p-1}} - |x|^{\frac{p}{p-1}} \right] \left(1 - \frac{1}{p} \right) n^{-\frac{1}{p-1}}, \quad |x| < R,$$

è una soluzione debole di (1.4) in $\Omega = \{x \mid |x| < R\}$, soddisfacente le condizioni al contorno $u=0$, $\frac{\partial u}{\partial n} = -\left(\frac{R}{n}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ su $\partial\Omega$. Osserviamo che $-\left(\frac{R}{n}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{|\Omega|^{1/n}}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{p-1}}$.

Inoltre, la funzione u in (1.7) non è C^2 se $p > 2$, e quindi l'assunzione a priori nel Teorema di Serrin sopra ricordato sarebbe nel presente contesto impropria.

L'equazione (1.4) si presenta nello studio del moto rettilineo stazionario di un fluido incompressibile non-Newtoniano. (Si dice tale un fluido che non verifichi la legge d'inerzia di Newton). Se, infatti, u denota la componente del campo vettoriale velocità nella direzione del flusso, e μ e ϕ sono le funzioni materiali che denotano lo stress radente e normale rispettivamente, allora le condizioni dinamiche per il flusso rettilineo si riducono alle relazioni

$$(1.8) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mu \nabla u) = 2a \\ \operatorname{div}(\phi \nabla u) \nabla u = \nabla g \end{cases},$$

essendo $a = \text{costante}$, $\mu = \mu(|\nabla u|^2)$, $\phi = \phi(|\nabla u|^2)$ e g una funzione legata alla pressione idrostatica. E' allora chiaro che si pone $f(t) = \int_0^t s \mu(s^2) ds$ e $a = -\frac{1}{2}$ nella prima equazione in (1.8), quest'ultima si riduce alla (1.4). La seconda equazione in (1.8) è scritta in forma vettoriale. E' ovvio che ogni sua parte scalare contiene termini del tipo $\operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \nabla u)$. Una derivazione delle (1.8) è contenuta in [FS], dove si dimostra il seguente

Teorema. *Sotto opportune ipotesi di analiticità sulle funzioni μ e ϕ , ammesso che $\phi \not\equiv \text{cost.}$ μ , e sotto la condizione di aderenza $u=0$ su $\partial\Omega$, il flusso rettilineo stazionario di un fluido incompressibile non-Newtoniano (le cui funzioni materiali siano μ e ϕ) in un tubo fissato di sezione trasversale $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è impossibile, a meno che Ω sia o un cerchio oppure un anello fra due circonferenze concentriche.*

Va osservato che tale risultato era stato congetturato sulla base di considerazioni fisiche da J. Ericksen in [E]. Nel caso di un fluido (Newtoniano) viscoso e incompressibile che si muova in un tubo cilindrico retto di sezione Ω , e le cui linee di flusso siano rette parallele alle generatrici del cilindro, la componente del vettore velocità nella direzione del moto soddisfa l'equazione (qui $n=2$)

$$\Delta u = -\text{cost.} \quad \text{in } \Omega,$$

con la condizione d'aderenza

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ciò corrisponde alla scelta $f(t) = \frac{t^2}{2}$ in (1.4). Siccome lo stress tangenziale per unità di superficie è dato da $\mu \frac{\partial u}{\partial n}$, essendo μ la viscosità del fluido, allora il Teorema 1 implica che *lo stress tangenziale lungo le pareti del tubo è lo stesso in ogni punto se e solo se la sezione del tubo, Ω , è circolare.*

A conclusione di questo paragrafo citiamo un problema di simmetria diverso da quello qui studiato, ma ad esso legato (si veda ad es. [V], p. 688, problema 80).

Congettura di Schiffer. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso con frontiera C^2 . Supponiamo che esista una soluzione del problema

$$(1.9) \quad \begin{cases} \Delta w = -vw & \text{in } \Omega, \quad v > 0, \\ w|_{\partial\Omega} = b, \quad b = \text{costante}, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Allora Ω è una palla e w è simmetrica.

La connessione fra il problema (1.9) e il problema sovradeterminato che si studia in questa nota è la seguente. Sia w una soluzione di (1.9), e si ponga

$$(1.10) \quad u = \frac{w}{bv} - \frac{1}{v}.$$

$$\text{Allora } \Delta u = \frac{1}{bv} \Delta w = -\frac{1}{b} w = -vu - 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{1}{bv} \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

Quindi u in (1.10) risolve il problema

$$(1.11) \quad \begin{cases} \Delta u + vu = -1 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Questo problema è simile a quello, studiato in [S] e [W], di cui in questa nota si considera un'estensione. La congettura di Schiffer costituisce un problema ancora aperto. Si conoscono solo soluzioni parziali. C. Berenstein ha fatto vedere in [B] che se $v=v_2$ (il primo autovalore di Neumann positivo), allora la congettura è vera. Essa è anche vera se esistono infinite soluzioni di (1.9) con infiniti autovalori. Ciò è stato provato di recente da Berenstein e P. Young in [BY]. Aviles in [A] ha anche lui ottenuto dei risultati parziali.

Per concludere osserviamo che la congettura di Schiffer si può dimostrare equivalente al seguente problema in analisi armonica (si veda ad es. [B]).

Problema di Pompeiu. Dato un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con frontiera $\partial\Omega$ connessa e Lipschitziana, esiste $f \neq 0$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tale che per ogni movimento rigido $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si abbia

$$(1.12) \quad \int_{T(\Omega)} f(x) dx = 0 \quad ?$$

Se Ω è una palla la risposta è affermativa, si veda $[Wi]_1$ e [B]. S. Williams ha congetturato in $[Wi]_1$ che: *le palle sono gli unici domini per cui la risposta al problema di Pompeiu è affermativa.* Lo stesso autore ha dimostrato in $[Wi]_2$ il seguente importante risultato: *Se esiste una soluzione di (1.9) per un dominio Ω con frontiera Lipschitziana, allora in realtà $\partial\Omega$ è analitica reale.*

2. CENNI SULLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.

La dimostrazione del risultato di simmetria sotto le ipotesi generali del Teorema 1 comporta dettagli tecnici piuttosto laboriosi. L'esposizione di tali dettagli è fatta in [GL], e noi intendiamo evitare in questa sede inutili ripetizioni. Invece, vogliamo qui illustrare a grandi linee le principali idee su cui si basa la dimostrazione del Teorema 1, e facciamo ciò trat-

tando un caso speciale. Assumeremo nel seguito che Ω sia un dominio a frontiera regolare, C^2 per intenderci. Assumeremo inoltre che la funzione f in (1.2), (1.3) sia siffatta

$$(2.1) \quad f_\varepsilon(t) = \frac{1}{p}(\varepsilon^2 + t^2)^{\frac{p}{2}},$$

essendo $\varepsilon > 0$ fissato. Osserviamo subito che

$$(2.2) \quad \begin{cases} t^{-1} f'_\varepsilon(t) = (\varepsilon^2 + t^2)^{\frac{p}{2}-1} \\ f''_\varepsilon(t) = (p-2)t^2(\varepsilon^2 + t^2)^{\frac{p}{2}-2} + (\varepsilon^2 + t^2)^{\frac{p}{2}-1} \\ f'''_\varepsilon(t) = (p-2)(p-4)t^3(\varepsilon^2 + t^2)^{\frac{p}{2}-3} + 3(p-2)t(\varepsilon^2 + t^2)^{\frac{p}{2}-2}. \end{cases}$$

Dalla seconda delle (2.2) si trae $f''_\varepsilon(0) = \varepsilon^{p-2}$.

Consideriamo il problema di minimizzare il funzionale

$$(2.3) \quad \Phi_\varepsilon(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} (f_\varepsilon(|\nabla \zeta|) - \zeta) dx$$

sulle $\zeta \in W^{1,p}_0(\Omega) = \overline{C^\infty_0(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}$, essendo

$$\|u\|_{1,p} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_p.$$

E' ben noto, si veda ad es. [LaU, cap. 5] che tale problema ha un'unica soluzione $u_\varepsilon \in W^{1,p}_0(\Omega)$ che è una soluzione debole dell'equazione

$$(2.4) \quad \operatorname{div}(|\nabla u_\varepsilon|^{-1} f'_\varepsilon(|\nabla u_\varepsilon|) \nabla u_\varepsilon) = a_{ij}(u_\varepsilon)(u_\varepsilon)_{x_i x_j} = -1,$$

dove per $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ abbiamo posto

$$(2.5) \quad a_{ij}(\sigma) = |\sigma|^{-3} [|\sigma| f''_{\epsilon}(|\sigma|) - f'_{\epsilon}(|\sigma|)] \sigma_i \sigma_j + \delta_{ij} |\sigma|^{-1} f'_{\epsilon}(|\sigma|).$$

Notiamo esplicitamente che esiste una costante $C > 0$ e una successione $(\delta_{\epsilon})_{\epsilon > 0}$, con $\delta_{\epsilon} \rightarrow 0$, tale che

$$(2.6) \quad c^{-1}(t^{p-1}) \leq t f'_{\epsilon}(t) \leq c(t^{p+1}) \quad , \quad t > 0,$$

$$(2.7) \quad c^{-1} \leq \frac{t f''_{\epsilon}(t)}{f'_{\epsilon}(t)} \leq c \quad , \quad t > 0,$$

$$(2.8) \quad \delta_{\epsilon} \leq t^{-1} f'_{\epsilon}(t) \leq \delta_{\epsilon}^{-1} \quad , \quad 0 < t < 1.$$

Usando la (2.7) dalla (2.5) si deduce che $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$(2.9) \quad \min(c^{-1}, 1) |\xi|^2 f'_{\epsilon}(|\sigma|) |\sigma|^{-1} \leq a_{ij}(\sigma) \xi_i \xi_j \leq \max(c, 1) |\xi|^2 f'_{\epsilon}(|\sigma|) |\sigma|^{-1}.$$

Dalle (2.9), (2.8) e (2.6) si deduce infine l'esistenza di una costante $b_{\epsilon} > 0$ tale che $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$(2.10) \quad b_{\epsilon} |\xi|^2 (1 + |\sigma|)^{p-2} \leq a_{ij}(\sigma) \xi_i \xi_j \leq b_{\epsilon}^{-1} |\xi|^2 (1 + |\sigma|)^{p-2}.$$

Se $\sigma = 0$ poniamo (cfr. (2.2))

$$(2.11) \quad a_{ij}(0) = \delta_{ij} f''_{\epsilon}(0) = \delta_{ij} \epsilon^{p-2}.$$

Allora (2.5) definisce delle funzioni $a_{ij} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Da ciò e dalle (2.10), in base al Teorema 6.1 in [LaU, cap. 5], concludiamo che in realtà u_{ϵ} è una soluzione classica di (2.4), cioè $u_{\epsilon} \in C^{\infty}(\Omega)$. Da ora in poi supporremo fissata la funzione f_{ϵ} come in (2.1), e per semplicità di notazione scriveremo solo f . Consideriamo il problema

$$(2.12) \quad \begin{cases} \operatorname{div}((\varepsilon^2 + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u) = -1 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = a. & (a = \text{costante}) \end{cases}$$

Notiamo che nella notazione (1.4) risulta $(\varepsilon^2 + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} = |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)$ in ogni punto dove $|\nabla u| \neq 0$. Ricordiamo che stiamo assumendo $\partial\Omega \in C^2$.

Il caso speciale del Teorema 1 che vogliamo trattare è espresso dal seguente

Teorema 2. Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una soluzione di (2.12). Allora Ω è una palla e u è simmetrica rispetto al centro di essa.

La dimostrazione del Teorema 2 si basa principalmente su due Lemmi. Nel seguito \vec{n} denota la normale esterna a $\partial\Omega$.

Lemma 1. Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Allora, se f è come in (2.1)

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f(|\nabla u|) \, x \cdot \vec{n} \, d\sigma &= n \int_{\Omega} f(|\nabla u|) \, dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u) \frac{\partial n}{\partial n} |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \, d\sigma - \int_{\Omega} |\nabla u| f'(|\nabla u|) \, dx \\ &- \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \nabla u) \, dx. \end{aligned}$$

Nella (2.13) $|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)$ è da interpretarsi come $f''(0)$ nei punti $x \in \bar{\Omega}$ in cui $\nabla u(x) = 0$ (cfr. (2.2)).

Prova. Dal Teorema della divergenza si ottiene

$$\begin{aligned}
(2.14) \quad & \int_{\partial\Omega} f(|\nabla u|) \, x \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(f(|\nabla u|)x) \, dx = \\
& = n \int_{\Omega} f(|\nabla u|) \, dx + \int_{\Omega} x_i (f(|\nabla u|))_{x_i} \, dx = \\
& = n \int_{\Omega} f(|\nabla u|) \, dx + \int_{\Omega} x_i |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) u_{x_j x_i} u_{x_j} \, dx \\
& = n \int_{\Omega} f(|\nabla u|) \, dx + \int_{\Omega} x_i (|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) u_{x_i} u_{x_j})_{x_j} \, dx \\
& \quad - \int_{\Omega} x_i (|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) u_{x_j})_{x_i} u_{x_j} \, dx \\
& = n \int_{\Omega} f(|\nabla u|) \, dx + \int_{\partial\Omega} x_i n_j |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) u_{x_i} u_{x_j} \, d\sigma \\
& \quad - \int_{\Omega} \delta_{ij} |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) u_{x_i} u_{x_j} \, dx - \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)) \, dx
\end{aligned}$$

L'ultimo membro nella (2.14) è ciò che appare nel lato destro della (2.13).

Corollario 1. (Isoperimetrico). Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una soluzione del problema (2.12). Allora vale la seguente identità

$$(2.15) \quad \int_{\Omega} \left\{ [|\nabla u| f'(|\nabla u|)] + \frac{1}{n} u \right\} dx = (|a| f'(|a|) - f(|a|)) |\Omega|.$$

Prova. Osserviamo preliminarmente che

$$(2.16) \quad \int_{\partial\Omega} x \cdot \vec{n} \, d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} (|x|^2) \, d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta(|x|^2) \, dx = n |\Omega|$$

Inoltre, essendo $u|_{\partial\Omega} = 0$ si ha $|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 = a^2$ su $\partial\Omega$. Per $x \in \partial\Omega$ scriviamo $x = (x \cdot \vec{n})\vec{n} + \alpha(x)\vec{t}$ essendo \vec{t} un vettore del piano tangente in x a $\partial\Omega$. Allora

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \int_{\partial\Omega} x \cdot \nabla u \, d\sigma &= \int_{\partial\Omega} [(x \cdot \vec{n})\vec{n} + \alpha(x)\vec{t}] \cdot \nabla u \, d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} (x \cdot \vec{n}) \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = -|a| \int_{\partial\Omega} x \cdot \vec{n} \, d\sigma = -|a| n |\Omega| \end{aligned}$$

in base alla (2.16).

Infine, siccome vale (2.12) si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \nabla(u^2)) &= 2u \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)) \\ &+ 2|\nabla u| f'(|\nabla u|) = 2(|\nabla u| f'(|\nabla u|) - u) \end{aligned}$$

Quindi per il teorema della divergenza

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u| f'(|\nabla u|) - u) \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \nabla(u^2)) \, dx = \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial n} u \, d\sigma = 0 \end{aligned}$$

Usando (2.16) e (2.17) nella (2.13) si ottiene:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} f(|a|)n|\Omega| &= n \int_{\Omega} f(|\nabla u|) \, dx + n|a| f'(|a|) |\Omega| \\ &- \int_{\Omega} |\nabla u| f'(|\nabla u|) \, dx + \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) \, dx . \end{aligned}$$

Ora osserviamo che

$$(2.20) \quad \int_{\Omega} \mathbf{x} \cdot \nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} x_i n_i u \, d\sigma - n \int_{\Omega} u \, dx = -n \int_{\Omega} u \, dx$$

Sostituendo (2.20) nella (2.19), e tenendo conto della (2.18), si ottiene la (2.15).

Osservazione Notiamo esplicitamente che se fosse $f(t) = \frac{1}{p} t^p$, il caso degenerare corrispondente al p-Laplaciano, allora $tf'(t) - f(t) = (1 - \frac{1}{p})t^p$ e la (2.15) darebbe

$$(2.21) \quad (1 - \frac{1}{p}) \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} u \, dx = (1 - \frac{1}{p}) |a|^p |\Omega|$$

Siccome, d'altra parte, la (2.18) dà in questo caso

$$(2.22) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx = \int_{\Omega} u \, dx ,$$

la (2.21) diventa

$$(2.23) \quad [(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{n}] \int_{\Omega} u \, dx = (1 - \frac{1}{p}) |a|^p |\Omega| .$$

Queste considerazioni sono puramente formali in quanto, come s'è osservato nel paragrafo 1, in generale le soluzioni di $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = -1$ non sono C^2 . Si può però ovviare a tali inconvenienti. Ciò viene fatto in [GL].

Osserviamo ancora che se u soddisfa (2.12), allora la costante a non può essere qualunque. Infatti si ha

$$(2.24) \quad \begin{aligned} |\Omega| &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \nabla u) \, dx = - \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma \\ &= -a |a|^{-1} f'(|a|) |\partial\Omega| \end{aligned}$$

E quindi dev'essere

$$(2.25) \quad f'(|a|) = \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}$$

Usando tale informazione si ottiene nel caso in cui $f(t) = \frac{1}{p} t^p$ e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}\}$ la formula (1.7).

Il Corollario 1 è uno dei due principali ingredienti della dimostrazione del Teorema 2. L'altro è fornito dal seguente

Lemma 2. (Principio di massimo). Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una soluzione del problema (2.12). Se poniamo

$$(2.16) \quad g(x) = [|\nabla u(x)| f'(|\nabla u(x)|) - f(|\nabla u(x)|)] + \frac{1}{n} u(x),$$

allora

$$(2.27) \quad g(x) \leq |a| f'(|a|) - f(|a|), \quad x \in \Omega.$$

Osservazione. Notiamo esplicitamente che se g è come in (2.26) e u è soluzione di (2.12) allora si ha

$$g|_{\partial\Omega} = |a| f'(|a|) - f(|a|).$$

Inoltre, g è la funzione che compare al primo membro della (2.15).

Prova. Sia $\delta > 0$ con $\delta < \frac{1}{n}$, e consideriamo la funzione su $\bar{\Omega}$

$$(2.28) \quad g_\delta \stackrel{\text{def}}{=} g - \delta u = [|\nabla u| f'(|\nabla u|) - f(|\nabla u|)] + \left(\frac{1}{n} - \delta\right) u.$$

Vogliamo far vedere che g_δ non può assumere un massimo in un punto di Ω . Ra-

gioniamo per assurdo. Sia $x_0 \in \Omega$ un punto di massimo relativo per g_δ . Si possono avere due casi: $\nabla u(x_0) = 0$, $\nabla u(x_0) \neq 0$. Vogliamo far vedere che non può verificarsi il caso $\nabla u(x_0) = 0$. Un calcolo esplicito dà:

$$(2.29) \quad (g_\delta)_{x_j} = f''(|\nabla u|) u_{x_\ell x_j} u_{x_\ell} + \left(\frac{1}{n} - \delta\right) u_{x_j} \text{ in } \Omega.$$

Usando la (2.29) si ottiene in ogni punto $x \in \Omega$ in cui $\nabla u(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} (g_\delta)_{x_j x_j} &= f'''(|\nabla u|) |\nabla u|^{-1} u_{x_\ell x_j} u_{x_m x_j} u_{x_\ell} u_{x_m} \\ &+ f''(|\nabla u|) u_{x_\ell x_j x_j} u_{x_\ell} + f''(|\nabla u|) u_{x_\ell x_j} u_{x_\ell x_j} + \left(\frac{1}{n} - \delta\right) u_{x_j x_j}. \end{aligned}$$

Ora supponiamo che x_0 sia tale che $\nabla u(x_0) = 0$. Tenuto conto del fatto che (cfr. 2.2)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1} f'''(t) = 3(p-2) \varepsilon^{p-4},$$

andando al limite nella (2.30) su una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Ω tale che $x_n \xrightarrow{x \rightarrow \infty} x_0$, si ottiene

$$(2.31) \quad \Delta g_\delta(x_0) = f''(0) \sum_{j, \ell=1}^n u_{x_j x_\ell}^2(x_0) + \left(\frac{1}{n} - \delta\right) \Delta u(x_0).$$

Osserviamo ora che dalla (2.5) si trae (ora è $f_\varepsilon = f$)

$$a_{ij}(0) = \delta_{ij} f''(0),$$

e quindi la (2.4) implica

$$(2.32) \quad -1 = \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \nabla u)(x_0) = \delta_{ij} f''(0) u_{x_i x_j}(x_0) = f''(0) \Delta u(x_0)$$

Infine, per la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$(2.33) \quad (\Delta u)^2 \leq n \sum_{j=1}^n u_{u, x_j}^2 \leq n \sum_{j, \ell=1}^n u_{x_j x_\ell}^2.$$

Usando le (2.32), (2.33) nella (2.31) dà

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \Delta g_\delta(x_0) &\geq f''(0) \frac{1}{n} (\Delta u(x_0))^2 + \left(\frac{1}{n} - \delta\right) \Delta u(x_0) \\ &= f''(0) \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{f''(0)}\right)^2 - \left(\frac{1}{n} - \delta\right) \frac{1}{f''(0)} = \frac{\delta}{f''(0)} > 0 \end{aligned}$$

Ma la (2.34) non può sussistere in un punto di massimo della g_δ e quindi dev'essere

$$(2.35) \quad \nabla u(x_0) \neq 0.$$

Operiamo ora un cambiamento di coordinate in modo che risulti

$$(2.36) \quad \nabla u(x_0) = (0, 0, \dots, 0, |\nabla u(x_0)|)$$

Ciò è possibile in virtù della (2.35). Siccome stiamo assumendo che x_0 sia un punto di massimo per g_δ dalle (2.29) e (2.36) si ottiene in x_0

$$(2.37) \quad 0 = (g_\delta)_{x_n} = f''(|\nabla u|) u_{x_n x_n} |\nabla u| + \left(\frac{1}{n} - \delta\right) |\nabla u|,$$

e quindi

$$(2.38) \quad u_{x_n x_n}(x_0) = \frac{\delta - \frac{1}{n}}{f''(|\nabla u(x_0)|)}.$$

Ora per a_{ij} come in (2.5) poniamo

$$d_{ij}(\sigma) = \frac{a_{ij}(\sigma)}{f''(|\sigma|)}$$

Usando la (2.29) si ottiene in x_0

$$\begin{aligned} (d_{ij}(\nabla u)(g\delta)_{x_j})_{x_i} &= (a_{ij}(\nabla u)u_{x_\ell x_j} u_{x_\ell} + (\frac{1}{n} - \delta) d_{ij}(\nabla u)u_{x_j})_{x_i} \\ (2.39) \quad &= (a_{ij}(\nabla u) u_{x_\ell x_j})_{x_i} u_{x_\ell} + a_{ij}(\nabla u)u_{x_\ell x_j} u_{x_\ell x_i} \\ &\quad + (\frac{1}{n} - \delta) (d_{ij}(\nabla u) u_{x_j})_{x_i} . \end{aligned}$$

Ora osserviamo che dalla (2.4) si ricava

$$(2.40) \quad (a_{ij}(\nabla u)u_{x_\ell x_j})_{x_i} = 0 \quad \ell = 1, \dots, n .$$

Analizziamo il secondo addendo a secondo membro della (2.39). Se nella (2.5) si prende $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $\sigma = (0, 0, \dots, 0, |\sigma|)$, allora si ottiene

$$(2.41) \quad a_{ij}(\sigma) = \begin{cases} \delta_{ij} \frac{f'(|\sigma|)}{|\sigma|} , & i, j = 1, \dots, n, \text{ } i \neq j \neq n, \\ f''(|\sigma|) , & i=j=n . \end{cases}$$

La (2.41) è evidente se $i, j = 1, \dots, n-1$. Se infine $i=j=n$ si ha da (2.5)

$$\begin{aligned}
 a_{nn}(\sigma) &= |\sigma|^{-3} \{ |\sigma| f''(|\sigma|) - f'(|\sigma|) \} \sigma_n^2 + |\sigma|^{-1} f'(|\sigma|) \\
 &= |\sigma|^{-1} \{ |\sigma| f''(|\sigma|) - f'(|\sigma|) \} + |\sigma|^{-1} f'(|\sigma|) = f''(|\sigma|)
 \end{aligned}$$

Utilizzando la (2.41) si ottiene in x_0

$$\begin{aligned}
 (2.42) \quad a_{ij}(\nabla u) u_{x_\ell x_j} u_{x_\ell x_i} &= |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^n u_{x_\ell x_i}^2 \\
 &+ f''(|\nabla u|) \sum_{\ell=1}^n u_{x_\ell x_n}^2.
 \end{aligned}$$

Possiamo perciò riscrivere la (2.39) così

$$\begin{aligned}
 (2.43) \quad (d_{ij}(\nabla u)(g_\delta)_{x_j x_i}) &= |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^n u_{x_\ell x_i}^2 \\
 + f''(|\nabla u|) \sum_{\ell=1}^n u_{x_\ell x_n}^2 &+ \left(\frac{1}{n} - \delta\right) (d_{ij}(\nabla u) u_{x_j x_i}) = I_1 + I_2 + I_3.
 \end{aligned}$$

Procedendo come in (2.33) si ottiene la stima

$$(2.44) \quad I_1 \geq |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} \right)^2.$$

Ora dalle (2.4), (2.41) e (2.38) si ha in x_0

$$(2.45) \quad \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} = - \frac{|\nabla u|}{f'(|\nabla u|)} \left(1 + f''(|\nabla u|) u_{x_n x_n} \right) = - \frac{|\nabla u|}{f'(|\nabla u|)} \left(1 + \delta - \frac{1}{n} \right),$$

e quindi

$$(2.46) \quad I_1 \geq \frac{|\nabla u|}{(n-1)f'(|\nabla u|)} \left(1 + \delta - \frac{1}{n}\right)^2$$

Dalla (2.38) si ha

$$(2.47) \quad I_2 \geq f''(|\nabla u|) u_{x_n x_n}^2 = \frac{\left(\frac{1}{n} - \delta\right)^2}{f''(|\nabla u|)}.$$

Esaminiamo infine I_3 .

Usando la (2.41), la (2.36) e la (2.38) si perviene all'identità valida in x_0 .

$$(2.48) \quad I_3 = -\frac{\left(\frac{1}{n} - \delta\right)^2}{f''(|\nabla u|)} + \left(\frac{1}{n} - \delta\right)\left(\frac{1}{n} - \delta - 1\right) \frac{|\nabla u|}{f'(|\nabla u|)}$$

Combinando (2.46), (2.47) e (2.48) si ottiene finalmente

$$(2.49) \quad (d_{ij}(\nabla u)(g_\delta)_{x_j x_i}) > \frac{|\nabla u|}{f'(|\nabla u|)} \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}{n-1} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \right] = 0.$$

La (2.49) dimostra che g_δ non può assumere un massimo in Ω e quindi dev'essere

$$(2.50) \quad g_\delta(x) < |a|f'(|a|) - f(|a|) \quad \forall x \in \Omega$$

Facendo ora tendere $\delta \rightarrow 0$ in (2.50) si ottiene la (2.27).

Il Corollario 1 e il Lemma 2 hanno come immediata conseguenza il seguente

Lemma 3. Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una soluzione di (2.12). Allora dev'essere

$$(2.51) \quad |\nabla u| f'(|\nabla u|) - f(|\nabla u|) + \frac{1}{n} u \equiv |a|f'(|a|) \text{ in } \Omega.$$

Con il Lemma 3 a disposizione la dimostrazione del Teorema 2 segue da argomenti di simmetria.

Prova del Teorema 2. Osserviamo che la (2.51) implica che valgano le uguaglianze nelle (2.46), (2.47). Sia G l'insieme così definito

$$G = \{x \in \Omega \mid |\nabla u(x)| > 0\}.$$

G è ovviamente aperto. Sia $x_0 \in G$ fissato. Operiamo una trasformazione di coordinate in modo tale che in x_0 valga la (2.36). Ora si può avere uguaglianza nelle (2.46), (2.47), (2.48) se e solo se in x_0

$$(2.52) \quad \begin{cases} u_{x_i x_j} = -\delta_{ij} \frac{|\nabla u|}{nf'(|\nabla u|)} \quad , \quad i, j \neq n, \\ u_{x_n x_n} = -\frac{1}{nf''(|\nabla u|)} \quad . \end{cases}$$

Sia $y_0 \in \Omega$ tale che $\nabla u(y_0) = 0$. Un tale punto esiste in quanto u ha un massimo assoluto in Ω .

Affermiamo che

$$(2.53) \quad \lambda(x) = (f'(|\nabla u(x)|))^2 - \frac{|x-y_0|^2}{n^2} = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

La verifica di (2.53) si fa tramite la (2.52) facendo vedere che l'Hessiana di $\frac{n^2}{2} f'(|\nabla u|)^2$ è la matrice identità in G , e quindi λ è una funzione lineare in G . Ma siccome $f'(|\nabla u|)^2$ si annulla con le sue derivate su $\partial G \cap \Omega = \{x \in \Omega \mid |\nabla u(x)| = 0\}$ tale funzione lineare dev'essere nulla su Ω , da cui (2.53). Siccome $f' \neq 0$, la (2.53) implica che $|\nabla u|$ è simmetrico rispetto a y_0 . Ma allora ciò è vero anche per la u in base alla (2.51).

BIBLIOGRAFIA

- [A] P. AVILES, Symmetry Theorems Related to Pompeiu's Problem, *Amer. J. of Math.* 108 (1986), 1023-1036.
- [B] C. BERENSTEIN, An Inverse Spectral Theorem and Its Relation to the Pompeiu Problem, *Journal d'Analyse Mathem.*, 37 (1980), 128-144.
- [BY] C. BERENSTEIN and P. YANG, An Inverse Neumann Problem, Preprint.
- [E] J.L. ERICKSEN, Overdetermination of the Speed in Rectilinear Motion of Non-Newtonian Fluids, *Quarterly of Appl. Math.*, 14 (1956), 318-321.
- [FS] R.L. FOSDICK and J. SERRIN, Rectilinear Steady Flow of Simple Fluids, *Proc. Royal Soc. London, A.* 332 (1973), 311-333.
- [GL] N. GAROFALO and J.L. LEWIS, A Symmetry Result Related to Some Overdetermined Boundary Value Problems, preprint.
- [LU] O.A. LADYZHENSKAYA and N. URALT'TSEVA, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press (1968).
- [S] J. SERRIN, A Symmetry Problem in Potential Theory, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 43 (1971), 304-318.
- [W] H. WEINBERGER, Remark on the Preceding Paper of Serrin, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 43 (1971), 319-320.
- [Wi]₁ S.A. WILLIAMS, A Partial Solution of the Pompeiu Problem, *Math. Ann.* 223 (1976), 183-190.
- [Wi]₂ S.A. WILLIAMS, Analyticity of the Boundary for Lipschitz Domains without the Pompeiu Property, *Indiana Univ. Math. J.*, 30, no. 3 (1981), 357-369.
- [Y] S.T. YAU, Seminar on Differential Geometry, Problem Section; S.T. Yau Ed., *Annals of Math. Studies*, Princeton Univ. Press (1982).